Kompleksni brojevi (C)

Kompleksni brojevi su izrazi oblika: $z = a + bi$ gde su a i b realni brojevi a $i \rightarrow$ simbol koji ima vrednost $i = \sqrt{-1}$. **POGLEDAJ NAPOMENU ZA $i = \sqrt{-1}$ NA 10 STRANI !**

Za kompleksan broj $z = a + bi$, a je njegov **realni deo** i obeležava se $\mathrm{Re}(z) = a$, b je njegov **imaginarni deo** i obeležava se $\mathrm{Im}(z) = b$, a i je **imaginarna jedinica**.

Primeri:

$$z_1 = 5 + 4i \rightarrow \mathrm{Re}(z_1) = 5, \mathrm{Im}(z_1) = 4$$
$$z_2 = 5 - 2i \rightarrow \mathrm{Re}(z_2) = 5, \mathrm{Im}(z_2) = -2$$
$$z_3 = -\frac{3}{4} - 7i \rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = -\frac{3}{4}, \mathrm{Im}(z_3) = -7$$
$$z_4 = 8i \rightarrow \mathrm{Re}(z_4) = 0, \mathrm{Im}(z_4) = 8$$
$$z_5 = 2 \rightarrow \mathrm{Re}(z_5) = 2, \mathrm{Im}(z_5) = 0$$

Dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ su jednaka ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$,tj imaju iste realne i imaginarne delove.

Zanimljivo je videti kako se ponašaju stepeni broja i .

$$i = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

itd.

Šta zaključujemo? i - stepenovano bilo kojim brojem može imati samo jednu od ove 4 vrednosti: $i, -1, -i$ ili 1.

Uopšteno, tu činjenicu bi mogli zapisati:

$$i^{4k}=1$$
$$i^{4k+1}=i \qquad \text{za} \quad k\in N.$$
$$i^{4k+2}=-1$$
$$i^{4k+3}=-i$$

Kako ovo primeniti u zadacima?

Najjednostavnije je da eksponent podelite sa 4. Od ostatka zavisi rešenje:

$$i^n=\begin{cases} 1, & \text{ako je n deljiv sa 4 (bez ostatka)} \\ i, & \text{ako pri deljenju sa 4 dobijemo ostatak 1} \\ -1, & \text{ako pri deljenju sa 4 dobijemo ostatak 2} \\ -i, & \text{ako pri deljenju sa 4 dobijemo ostatak 3} \end{cases}$$

Primeri:

Izračunati:

$a)\ i^{100}$

$b)\ i^{2006}$

$v)\ i^{25}$

$g)\ i^{102}$

$d)\ i^{23}$

$a) i^{100}$

Ovde postoje 2 ideje : Ili da koristimo da je $i^4=1$ i naravno pravila za stepen : $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ i $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

Dakle: $i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=1$ ili

druga ideja da je $i^{4k}=1$

$$i^{100}=(i^4)^{50}=1^{50}=1$$

A opet možemo samo podeliti 100:4=25, nema ostatka pa zaključimo $i^{100}=1$

Odlučite sami šta vam je lakše!

$b) i^{2006} = ?$

$$i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1$$

A možemo I da rezonujemo 2006 :4 = 501 I ostatak 2 pa je rešenje -1.

$v) i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = (i^2)^{12} \cdot i = (-1)^{12} \cdot i = 1 \cdot i = i$

$\downarrow$

Kad je stepen neparan, napišemo ga kao za 1 manji paran broj pa plus 1, to jest $25 = 24 + 1$.

$g) i^{102} = (i^2)^{51} = (-1)^{51} = -1$

$d) i^{23} = i^{22} \cdot i^1 = (i^2)^{11} \cdot i = (-1)^{11} \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Pazi: $(-1)^{\text{paran broj}} = 1$

$(-1)^{\text{neparan broj}} = -1$

Kako se sabiraju, oduzimaju I množe kompleksni brojevi?

1) Zbir dva kompleksna broja $a+bi$ i $c+di$ je kompleksan broj $(a+c)+i(b+d)$, a njihova razlika je $(a-c)+i(b-d)$. To znači da se sabiraju I oduzimaju "normalno'', kao u R.

Primer: $z_1 = 5+3i$
$z_2 = 4-10i$

$$z_1 + z_2 = 5+3i+4-10i = 5+4+3i-10i = 9-7i$$

$$z_1 - z_2 = 5+3i-(4-10i) = 5+3i-4+10i = 1+13i$$

2) Proizvod dva kompleksna broja $a+bi$ i $c+di$ je kompleksan broj

$(ac-bd)+i(ad+bc) \rightarrow$ množi se "svaki sa svakim'' I vodimo računa da je $\boxed{i^2=-1}$

$$
\begin{aligned}
(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+bci+bd\,\underline{i^2} \\
&= ac+adi+bci-bd \\
&= ac-bd+i(ad+bc)
\end{aligned}
$$

Primer: $z_1=-3+5i$

$z_2=4-2i$

$z_1\cdot z_2=(-3+5i)\cdot(4-2i)=-12+6i+20i-10i^2=$ [sad zameni da je $i^2=-1$, pa $-10i^2=-10\cdot(-1)=10$] $=-12+6i+20i+10=-2+26i$

Deljenje kompleksnih brojeva

Recimo najpre da svaki kompleksan broj ima svoj konjugovan broj.

Za $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$ je konjugovan broj.

Primeri: za $z=10+12i$ je $\bar{z}=10-12i$

za $z=4-3i$ je $\bar{z}=4+3i$

za $z=-4+5i$ je $\bar{z}=-4-5i$

Dva kompleksna broja se dele tako što izvršimo racionalisanje sa konjugovanim brojem delioca.

$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a+bi}{c+di}\cdot\dfrac{c-di}{c-di}=$ gore množimo "svaki sa svakim'' a dole je razlika kvadrata.

$$=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-(di)^2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Primer 1)

$$=\frac{5+2i}{4-3i}=\frac{5+2i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{(5+2i)(4+3i)}{4^2-(3i)^2}=$$

$$=\frac{20+15i+8i+6i^2}{16-3^2\cdot i^2}=\text{zamenimo da je } i^2=-1$$

$$=\frac{20+15i+8i-6}{16+9}=\frac{14+23i}{25}=\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i$$

Savet: Uvek na kraju rastavi $\frac{a+bi}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}i$ da bi mogao da pročitaš $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$

Primer 2)

$$\frac{3+7i}{-5+3i}=\frac{3+7i}{-5+3i}\cdot\frac{-5-3i}{-5-3i}$$

$$=\frac{(3+7i)(-5-3i)}{(-5)^2-(3i)^2}$$

$$=\frac{-15-9i-35i-21i^2}{25-3^2\cdot i^2}$$

$$=\frac{-15-9i-35i+21}{25+9}$$

$$=\frac{6-44i}{34}=\frac{6}{34}-\frac{44}{34}i=\frac{3}{17}-\frac{22}{17}i$$

<u>Modul</u> kompleksnog broja $z=a+bi$ je nenegativan broj $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Primeri: Za $z=3+4i$ je $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$

Za $z=-9-12i$ je $|z|=\sqrt{(-9)^2+(-12)^2}=\sqrt{81+144}=15$

Navešćemo neke od osobina vezanih za kompleksne brojeve koje će nam dosta pomoći u rešavanju zadataka:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (komutativnost sabiranja)

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asocijativnost sabiranja)

3) $z + 0 = 0 + z = z$ (0 je netral za +)

4) $z + z^{'} = z^{'} + z = 0$ ($z^{'}$ je suprotni broj)

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (komutativnost množenja)

6) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (asocijativnost množenja)

7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (1 je neutral za •)

8) $z \cdot z^{'} = z^{'} \cdot z = 1$ ($z^{'}$ je inverzni za •)

9) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (distributivnost)

10) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

11) $|z^2| = |z|^2$

12) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Primer : Nadji realni i imaginarni deo kompleksnog broja: $z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5}$

Rešenje:

Odredimo najpre $(1-i)^{12} = ?$

Podjimo od $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Kako je $(1-i)^{12} = ((1-i)^2)^6 = (-2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 2^6 \cdot (-1) = -2^6 = -64$

Nadjimo dalje $(1+i)^5 = ?$

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$(1+i)^5 = (1+i)^4 \cdot (1+i) = ((1+i)^2)^2 \cdot (1+i) = (2i)^2 (1+i)$

$= 4 \cdot i^2 (1+i) = -4(1+i)$

$$z = \frac{(1-i)^{12}}{(1+i)^5} = \frac{-64}{-4(1+i)} = \frac{16}{1+i} = \frac{16}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

$$= \frac{16(1-i)}{1^2 - i^2} = \frac{16(1-i)}{1+1} = \frac{16(1-i)}{2} = 8(1-i) =$$

$$= 8 - 8i$$

Dakle : $\operatorname{Re}(z) = 8 \quad \operatorname{Im}(z) = -8$

Primer : Nadji x i y iz $x-1+(y+3)i=(1+i)(5+3i)$

Rešenje:

$$x-1+(y+3)i=(1+i)(5+3i)$$
$$x-1+(y+3)i=5+3i+5i+3i^2$$
$$x-1+(y+3)i=5+8i-3$$
$$\underbrace{x-1}_{\text{Re}}+\underbrace{(y+3)}_{\text{Im}}i=\underbrace{2}_{\text{Re}}+\underbrace{8}_{\text{Im}}i$$

Dakle : $x-1=2 \Rightarrow x=2+1 \Rightarrow x=3$
$y+3=8 \Rightarrow y=8-3 \Rightarrow y=5$

Primer: Ako je $w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ dokazati da je $w^2+w+1=0$

Rešenje:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{4}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}{4}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+1=$$
$$\frac{1-2i\sqrt{3}-3+2(-1+i\sqrt{3})+4}{4}=$$
$$\frac{1\cancel{-2i\sqrt{3}}-3-2\cancel{+2i\sqrt{3}}+4}{4}=\frac{0}{4}=0$$

Primer: Odredi sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sistem jednačina:

$$|z-2i|=|z|$$
$$|z-i|=|z-1|$$

Rešenje: Neka je $z=a+bi$

$$z-2i=a+bi-2i=a+i(b-2)\Rightarrow |z-2i|=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$$
$$z-i=a+bi-i=a+i(b-1)\Rightarrow |z-i|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$$
$$z-1=a+bi-1=a-1+bi\Rightarrow |z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$$

Dakle:

$$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$$

Kvadrirajmo obe jednačine!

$$\cancel{a^2}+(b-2)^2=\cancel{a^2}+b^2$$
$$a^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$$

$$b^2-4b+4=b^2$$
$$-4b=-4$$
$$b=1$$

zamenimo u drugu jednačinu

$$a^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$$
$$a^2+(1-1)^2=(a-1)^2+1^2$$
$$a^2+0=a^2-2a+1+1$$
$$2a=2$$
$$a=1$$

Traženi kompleksni broj je $z=1+i$

Primer: Nadji sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju:

$$z^2 + |\bar{z}| = 0$$

Rešenje:

Neka je $z = a + bi$ traženi kompleksni broj. Onda je $\bar{z} = a - bi,\ |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$(a+bi)^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0$$

$a^2 + 2abi + b^2 i^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0$ Kako je $i^2 = -1 \Rightarrow$ Ovde očigledno i Re i Im moraju biti nula.

$$\underbrace{a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2}}_{\mathrm{Re}} + \underbrace{2ab}_{\mathrm{Im}} i = 0$$

$$a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0$$
$$2ab = 0$$

Iz $2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

1) Ako je $a = 0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$0^2 - b^2 + \sqrt{0^2 + b^2} = 0 \qquad (b^2 \geq 0)$$
$$\sqrt{b^2} = b^2$$

Ovde je očigledno $b = 0$ ili $b = -1$

2) Ako je $b = 0$, zamenimo u prvu jednačinu:

$$a^2 - 0^2 + \sqrt{a^2 + 0^2} = 0$$

$a^2 + \sqrt{a^2} = 0$ nema rešenja sem $a = 0$

$$\sqrt{a^2} = -a^2$$

Dakle: $z = 0$; $z = i$ i $z = -i$ su traženi brojevi.

Primer: Za koje vrednosti prirodnog broja n važi jednakost:

$$(1+i)^n = (1-i)^n \text{ ?}$$

Rešenje:

$$(1+i)^n = (1-i)^n$$

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$

Transformišemo izraz:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1^2+i^2} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{(1+i)^2}{2}$$

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$

Dakle:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Vratimo se u $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$, dobijemo $i^n = 1$

A ovo je (vec smo videli) moguće za n $= 4k$, $k \in N$.

NAPOMENA

Zapis $i = \sqrt{-1}$ nije korektan i nemojte ga upotrebljavati ako se ljuti Vaš profesor.

Nama se činilo da ćemo lakše objasniti šta se dešava ako pišemo ovako….

Ako se sećate , mi smo simbol za kvadratni koren koristili samo za kvadratni koren POZITIVNOG realnog broja, a ovde je u pitanju - 1.

Vezano za ovo, jedan naš čitalac nam je poslao sledeću zanimljivu stvar koja ide u prilog tezi da zapis nije korektan!

Pogledajte:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)*(-1)} = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = i * i = i^2 = -1 \rightarrow \boxed{1 = -1}$$

Dakle, još jednom:

Zapis $i = \sqrt{-1}$ nije korektan i nemojte ga upotrebljavati ako se ljuti Vaš profesor!

www.matematiranje.in.rs