KORENOVANJE

Neka je a realan i n prirodan broj.
Svako rešenje jednačine

$$x^n = a$$

"po x'' (ako postoji) naziva se n-ti koren broja a u oznaci $x = \sqrt[n]{a}$.
Dakle: simbol $\sqrt[n]{a}$ označava:

1) $n -$ ti koren realnog broja a u svim slučajevima kada je on jedinstven
$(n \in N,\ n = 2k-1,\ k \in N,\ a \in R)$
2) Pozitivan n-ti koren broja a u slučaju
$n = 2k,\ k \in N,\ a > 0$

Ova definicija sigurno nije baš mnogo jasna. Ajde da vidimo par primera:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2; \quad \sqrt[7]{0} = 0$$

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} = 2; \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

Pazi: $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2; \quad -\sqrt[4]{16} = -\sqrt[4]{2^4} = -2$

Pogrešno je pisati: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ **ZAPAMTI!!!**

Važi:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n - \ neparan \\ |a,| & n - \ paran \end{cases}$$

Primeri: (pazi, dogovor je da je $\sqrt{A} = \sqrt[2]{A}$, to jest, jedino se ovde ne piše broj 2)

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} \quad ; \quad \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 \quad ; \quad \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

ZAPAMTI: Kad vidiš 2, 4, 6,… (parni koren) iz nekog konkretnog broja, rešenje je uvek pozitivan broj. Kad vadiš 3, 5, 7… (neparan koren) iz nekog broja, rešenje može biti i negativan broj, u zavisnosti kakva je potkorena veličina.

$$\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5 \qquad \sqrt[3]{5^3}=5$$

$$\sqrt[4]{(-7)^4}=|-7|=7 \qquad \sqrt[3]{(-5)^3}=-5$$

$$\sqrt[6]{(-12)^6}=|-12|=12 \qquad \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5}=\frac{1}{10}$$

$$\sqrt[8]{\left(-\frac{1}{3}\right)^8}=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3} \qquad \sqrt[7]{\left(-\frac{3}{5}\right)^7}=-\frac{3}{5}$$

Primer: Za koje realne brojeve x je tačna vrednost:

a) $\sqrt{x^2}=x$
b) $\sqrt[3]{x^3}=-x$
v) $\sqrt{x^2}=-x$
g) $\sqrt{x^4}=\left(\sqrt{x}\right)^4$

Rešenje: a) $\sqrt{x^2}=x$ je tačna samo za vrednosti x koje su veće ili jednake nuli, jer

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \\ 0, & za\ \ x=0 \end{cases} \qquad \text{Dakle } x\ge 0$$

b) $\sqrt[3]{x^3}=-x$ je tačka samo za $x=0$. Zašto? Ako uzmemo da je x negativan broj, na primer $x=-5 \Rightarrow \sqrt[3]{(-5)^3}=-5\neq-(-5)=+5$, a ako uzmemo $x>0$, recimo $x=10$
$\sqrt[3]{10^3}=10\neq-10$

v) $\sqrt{x^2}=-x$, x mora biti manje od nule, ili nula jer kao malopre važi:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \quad \text{Dakle} \quad x\le 0$$

g) $\sqrt{x^4}=\left(\sqrt{x}\right)^4$, Ovde mora biti $x\geq 0$. Zašto? Zbog $\left(\sqrt{x}\right)^4$ koji ne može biti negativan odnosno mora biti $x>0$

Pravila:

1) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
2) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
3) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$
6) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (p se skrati)

Moramo naglasiti da pravila važe pod uslovima da je: $a,b\rightarrow$ pozitivni realni brojevi $m,n,p\rightarrow$ prirodni brojevi.

Zadaci:

1)

a) Izračunaj $\sqrt{36}-2\sqrt{25}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[5]{32}$

$\sqrt{36}-2\sqrt{25}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[5]{32}=$

$=6-2\cdot 5+\sqrt[4]{2^4}-\sqrt[5]{2^5}=$

$=6-10+2-2=-4$

b) Izračunaj $\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}+\sqrt[4]{16}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\sqrt[4]{2^4}=$

$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4$

c) Izračunaj $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt{4}$

$\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt{4}=$

$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}-2=\ \frac{2}{3}-3-2=\frac{2}{3}-5=-4\frac{1}{3}$

d) Izračunaj $\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{(-8)}\cdot\sqrt[5]{-32}$

$$\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{(-8)}\cdot\sqrt[5]{-32}=$$
$$=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt[3]{(-2)^3}\cdot\sqrt[5]{(-2)^5}=$$
$$=3\cdot(-2)\cdot(-2)=12$$

2) Izračunaj $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$

$$\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-5|+|x+5|$$

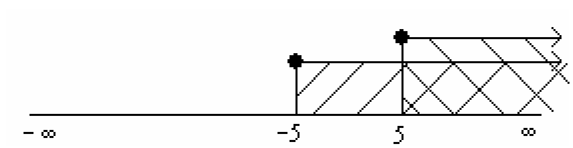
Kako je:

$$|x-5|=\begin{cases}x-5, & za\ \ x-5\geq 0\\ -(x-5), & za\ \ x-5<0\end{cases}=\begin{cases}x-5, & za\ x\geq 5\\ -(x-5), & za\ x<5\end{cases}\quad \text{i}$$

$$|x+5|=\begin{cases}x+5, & za\ \ x+5\geq 0\\ -(x+5), & za\ \ x+5<0\end{cases}=\begin{cases}x+5, & za\ x\geq -5\\ -(x+5), & za\ x<-5\end{cases}$$

moramo najpre videti "gde ima'' rešenja

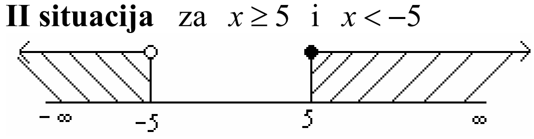
I situacija za $x\geq 5$ i $x\geq -5$



$$|x-5|+|x-5|=x-5+x+5=2x$$

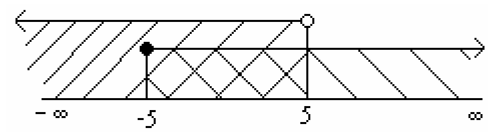
$x\in[5,\infty)$

II situacija za $x\geq 5$ i $x<-5$



Nema rešenja

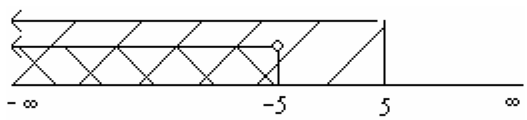
III situacija za $x < 5$ i $x \geq -5$



$$|x-5|+|x-5| = -x+5+x+5 = +10$$

$x \in [-5,5)$

IV situacija za $x < 5$ i $x < -5$



$$|x-5|+|x+5| = -x+5-x-5 = -2x$$

Konačno: $|x-5|+|x+5| = \begin{cases} -2x, & x < -5 \\ 10, & -5 \leq x < 5 \\ 2x, & x \geq 5 \end{cases}$

<u>Racionalisanje</u>

Koristeći se osobinama korena, možemo, u cilju uprošćavanja nekog izraza, odstraniti korene ili ih premestiti na željeno mesto.

<u>Primeri:</u>

1) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

2) $\frac{9}{\sqrt{12}} = \frac{9}{\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{9\sqrt{12}}{12} = \frac{3\sqrt{12}}{4} = \frac{3\sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ovo je bio najprostiji tip zadataka, gde racionalisanjem prebacujemo koren iz imenioca u brojilac.

U sledećoj grupi zadataka ćemo koristiti da je $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$, $a > 0$

4) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} =$ da bi "uništili '' koren u imeniocu moramo napraviti $\sqrt[3]{2^3}$, a pošto imamo $\frac{6}{\sqrt[3]{2^1}}$ treba racionalisati sa $\sqrt[3]{2^2}$. Dakle:

$$\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$$

5) $\frac{10}{\sqrt[4]{3}} = \frac{10}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{10\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{10\sqrt[4]{27}}{3} =$

6) $\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2 b}} = \frac{ab}{\sqrt[3]{a^2 b^1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^1 b^2}}{\sqrt[3]{a^1 b^2}} = \frac{ab\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^3 b^3}} = \frac{ab\sqrt[3]{ab^2}}{ab} = \sqrt[3]{ab^2}$

Kad u imeniocu imamo zbir ili razliku dva kvadratna korena, upotrebljavamo razliku kvadrata: $(A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2$

7) $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

8) $\frac{11}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \frac{11(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

9)

$$\frac{5}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{4\cdot 3 - 9\cdot 2} = \frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{12-18} = \frac{5(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{-6}$$

U zadacima u kojima se u imeniocu javlja zbir ili razlika "trećih'' korena moramo koristiti:

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \rightarrow$ Razlika kubova

$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \rightarrow$ Zbir kubova

10)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3+2} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{5}$$

---

11)

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} = \frac{5}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4^2}} = \frac{5(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16})}{\sqrt[3]{5}^3 - \sqrt[3]{4}^3} = 5(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16})$$

---

12) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}-2}=$ ovde ćemo uraditi dupli racionalizaciju da bi "uništili" četvrti koren.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{5}-2}=\frac{3}{\sqrt[4]{5}-2}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}+2}{\sqrt[4]{5}+2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)}{\sqrt[4]{5^2}-2^2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)}{\sqrt{5}-4}$$ sad opet racionalizacija

$$\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)}{\sqrt{5}-4}\cdot\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}+4}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}{\sqrt{5^2}-4^2}=\frac{3\left(\sqrt[4]{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+4\right)}{-11}$$

Vratimo se na zadatke sa korenima:

3) Izračunati:

a) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3$

Rešenje:

a)

$$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[5]{x^{-1}\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{\sqrt{x^{-1}}}\cdot\sqrt[5]{x^{-1}}\sqrt[5]{\sqrt{x^{-1}}}=x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^{-1}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt[10]{x^{-1}}=x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{6}}\cdot x^{-\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{1}{10}}=$$
$$=x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}}=x^{\frac{20-5-6+3}{30}}=x^{\frac{12}{30}}=x^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{x^2}$$

b)

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3=\sqrt{x}\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}:\sqrt{x^{-3}}=$$
$$x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{6}}\cdot x^{\frac{2}{3}}:x^{-\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)}=x^{\frac{3+2+4+9}{6}}=x^{\frac{18}{6}}=x^3$$

__**ZAPAMTI:**__ $\boxed{\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}}$

4) Izračunaj:

a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$

b) $\sqrt{3}+3\sqrt{27}-2\sqrt{48}$

Ovde je ideja da upotrebom pravila za korenovanje $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, svaki sabirak svedemo na “čist” koren u smislu da ima celobrojno rešenje.

a)

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}=$$

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=$$

$$5\sqrt{2}+3\cdot 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}-7\sqrt{2}=$$

$$\cancel{5\sqrt{2}}+6\sqrt{2}\cancel{-5\sqrt{2}}-7\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

b)

$$\sqrt{3}+3\sqrt{27}-2\sqrt{48}=$$

$$\sqrt{3}+3\sqrt{9\cdot 3}-2\sqrt{16\cdot 3}=$$

$$\sqrt{3}+3\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 4\sqrt{3}=\sqrt{3}+9\sqrt{3}-8\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

5) Izračunaj: $3\cdot\sqrt[12]{4}-4\cdot\sqrt[15]{27}+8\cdot\sqrt[24]{16}+5\cdot\sqrt[20]{81}$

Rešenje:

$$3\cdot\sqrt[12]{4}-4\cdot\sqrt[15]{27}+8\cdot\sqrt[24]{16}+5\cdot\sqrt[20]{81}=$$

$$3\cdot\sqrt[12]{2^2}-4\cdot\sqrt[15]{3^3}+8\cdot\sqrt[24]{2^4}+5\cdot\sqrt[20]{3^4}=$$

$$3\cdot\sqrt[6]{2}-4\sqrt[5]{3}+8\cdot\sqrt[6]{2}+5\sqrt[5]{3}=$$

$$=11\sqrt[6]{2}+\sqrt[5]{3}$$

LAGRANŽOV INDENTITET:

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Gde je $a>0,\quad b>0,\quad b<a^2$

Primenimo ga na 2 primera: **a)** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{1}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

b) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ = pazi, prvo moramo 4 da ubacimo pod koren!

$$\sqrt{6-\sqrt{16\cdot 2}}=\sqrt{6-\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-32}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-32}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-32}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{36-32}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2}{2}}+\sqrt{\frac{6-2}{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$$

7) Dokazati da je vrednost izraza $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ iracionalan broj.

Najpre ćemo upotrebom Lagranžovog indetiteta "srediti'' $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ i $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ =(prethodni zadatak) $=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, slično je i $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, Dakle:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\frac{2-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=$$ Pazi na znak!

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}\cancel{-2\sqrt{6}}\cancel{+3\sqrt{6}}-\sqrt{18}+6\sqrt{2}+\cancel{2\sqrt{6}}\cancel{-3\sqrt{6}}-\sqrt{18}}{3^2-\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{18}}{9-3}=\frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{9\cdot 2}}{6}=\frac{12\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{6}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$$

8) Dokazati da je: $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$.

Poći ćemo od leve strane da dobijemo desnu.

$$4+2\sqrt{3}=3+1+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$10+6\sqrt{3}=$ razmislimo da li ovo nije $10+6\sqrt{3}=(A+B)^3$?

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+1\right)^3&=\sqrt{3}^3+3\cdot\sqrt{3}^2\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1^2+1^3\\&=\sqrt{27}+3\cdot 3\cdot 1+3\sqrt{3}+1\\&=\sqrt{9\cdot 3}+9+3\sqrt{3}+1=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+10=10+6\sqrt{3}\end{aligned}$$

<u>Dakle:</u>

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$$

Ovim je dokaz završen!

9) Racionalisati: $\dfrac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+2}$

$$\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{7}+2\sqrt{3}+2}=\frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{7}+2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{6}{\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+1\right)+2\left(\sqrt{3}+1\right)}$$

$$=\frac{6}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{7}+2\right)}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-2}=$$

$$=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)\left(\sqrt{7}^2-2^2\right)}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)}{2\cdot 3}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{7}-2\right)$$

10) Racionalisati: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^3}-\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{1}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

Ovde smo imali A^2+AB+B^2, pa smo dodali A-B, da bi dobili A^3-B^3.